Gymnasium Erding Kollegstufenjahrgang 1996/98

FACHARBEIT

IM LEISTUNGSKURSFACH

MATHEMATIK

Thema: *Fraktale Geometrie am Beispiel von Iterationen mit komplexen Zahlen*

Verfasser: Michael Steil

Leistungskurs: M2

Kursleiter: StR Stitzl

Abgabetermin: 28. Januar 1998

Erzielte Note: _______________ in Worten: _______________

Erzielte Punkte: _______________ in Worten: _______________

(einfache Wertung)

Vorlage im Direktorat am ___________________________________

____

Unterschrift des Kursleiters

Inhaltsverzeichnis

1 Einige Grundbegriffe der fraktalen Geometrie

1.1 Stellung der fraktalen Geometrie

Fraktale Geometrie ist ein etwas sonderbares Teilgebiet der Mathematik. Zum einen, weil erste Arbeiten auf diesem Gebiet zwar bereits im 19. Jahrhundert erfolgten, intensive Forschung aber erst seit den 70er Jahren dieses Jahrhunderts mit Hilfe von Computern betrieben werden; in dieser Zeit wurde auch der Begriff der „Fraktale“ geprägt. Zum anderen, weil, was für die Mathematik äußerst untypisch ist, an manchen Stellen nur Vermutungen und Zusammenhänge aufgestellt wurden, mathematische Beweise jedoch (noch?) fehlen. Doch wahrscheinlich ist dies – neben dem oftmals faszinierenden Aussehen von fraktalen Figuren – genau das, was den Reiz dieses Teilgebietes ausmacht.

1.2 Erläuterung einiger für fraktale Geometrie notwendiger Begriffe

Um mit fraktalen Erscheinungen umgehen zu können, bedarf es der Definition einiger Fachbegriffe.

1.2.1 Fraktale

Als Fraktale werden geometrische Figuren bezeichnet, deren Dimension gebrochen (lat. *fractus*) ist. Der Begriff wurde 1975 von dem Mathematiker Benoit Mandelbrot (Abb.1 [3, S.55]) geprägt, nach dem auch die berühmte Mandelbrotmenge benannt ist. [3, S.182]

1.2.2 Gebrochene Dimension

Auch der Begriff der gebrochenen Dimension geht auf Mandelbrot zurück. Während man in der Euklidschen Geometrie nur mit ganzzahligen Dimensionen arbeitet (0 = Punkt, 1 = Gerade, 2 = Fläche, 3 = Raum, …), gibt es im Bereich der fraktalen Geometrie auch Figuren, deren Dimension keine ganze Zahl ist.

Ein Beispiel dafür ist der nach dem Mathematiker Georg Cantor benannte Cantor-Staub (Abb.2): Schneidet man aus einer Strecke das mittlere Drittel heraus und wiederholt dies unendlich oft mit allen immer wieder neu entstandenen Strecken, so erhält man einen sehr feinen Staub der Dimension 0,6309 (gerundet). Die Dimension ist also zwischen der des Punktes und der der Geraden. [3, S.180; 2, S.28]

Nimmt man hingegen eine Strecke und ersetzt das mittlere Drittel durch zwei ebenso lange Strecken, baut somit also eine Spitze über der Mitte auf, und wiederholt das mit jedem Flächenstück bis ins Unendliche, so entsteht die berühmte Kochkurve (Schneeflockenkurve, Abb.3 [1, S.115]) mit einer Dimension von etwa 1,2618; das ist zwischen der Geraden und der Fläche. [2, S.12]

1.2.3 Selbstähnlichkeit

Daß die Dimension der Kochkurve nicht 1 ist, geht darauf zurück, daß man, so weit man sie auch vergrößert, immer wieder neue Zacken findet; die Details gehen bis ins Unendliche; und das geht über die erste Dimension hinaus. Abgesehen davon ist wegen der nicht enden wollenden Details die Strecke unendlich lang, was im Eindimensionalen auch nicht möglich ist.

Diese Eigenschaft, daß bei immer weiteren Vergrößerungen immer mehr Details sichtbar werden, ist allen Fraktalen zu eigen und wird als „selbstähnlich" bezeichnet. Selbstähnliche Figuren zeigen in allen Größenordnungen immer dieselben oder ähnliche Strukturen (Abb.4 [1, S.112]).

1.2.4 Iteration

Bei den beiden bisherigen Beispielen mußte ein bestimmter Arbeitsschritt, wie z.B. beim Cantor-Staub das Herausnehmen des mittleren Drittels, immer wieder wiederholt werden, um letztendlich die gewünschte Figur zu bekommen.

Dieses unendliche Wiederholen eines Arbeitsschrittes ist eine einfache Form des Iterierens. Etwas mathematischer ist das wiederholte Einsetzen des Ergebnisses in eine Abbildungsformel, aus der eben dieses Ergebnis stammt (mathematische Rückkopplung). Auf diesem Prinzip basieren die bekannten Juliamengen.

2 Juliamengen

Der französische Mathematiker Gaston Julia (1893-1978) experimentierte 1918 als Kriegsverletzter in einem Lazarett (zeitparallel mit seinem Konkurrenten Pierre Fatou, 1878-1929) mit Iterationen in der komplexen Zahlenebene. Seine großartige geistige Leistung war dabei, die Haupteigenschaften der nach ihm benannten, äußerst komplexen Juliamengen ohne die Hilfe von Computern herauszufinden. Dennoch gerieten seine Erforschungen bald in Vergessenheit, da man sich damals unter seinen Erkenntnissen nur schwer etwas vorstellen konnte. [1, S.113]

2.1 Entstehung der Juliamenge

Julia untersuchte, was mit einem Punkt z in der komplexen Zahlenebene passiert, auf den wiederholt die Transformation $z_{n+1} = z_n^{\,2} + c$ angewandt wird. Der Kontrollparameter c (von „control") ist hierbei eine Konstante, die vorher festgelegt wird und einen entscheidenden Einfluß auf das Aussehen der gesamten Figur hat. Man setzt nun jeden Punkt (in einem gewissen Raster) in der Koordinatenform als z_0 in die Abbildungsformel ein und betrachtet das Verhalten der Iteration für n gegen Unendlich. [1, S.113]

Der einfachste Fall entsteht für $c = 0$. Die Abbildung $z_{n+1} = z_n^{\,2}$ unterschiedet drei Arten von Punkten, die anhand der Polarform gedeutet werden können:

1. Punkte, deren Betrag, d.h. deren Abstand vom Ursprung kleiner als 1 ist. Da die Quadrierung einer komplexen Zahl der Quadrierung ihres Betrags (und der Verdoppelung ihres Arguments) entspricht, nimmt der Betrag der resultierenden komplexen Zahl ständig ab. Der Punkt bewegt sich also auf den Ursprung zu; nicht jedoch auf direktem Weg, da sich das Argument in der Polarform auch mit jedem Schritt ändert. Diese Punkte werden somit vom Attraktor 0 angezogen, sie „konvergieren".
2. Punkte, deren Betrag größer als 1 ist. Die wiederholte Quadrierung führt zu einem immer größeren Betrag; das Argument verhält sich wie in Fall 1. Die Punkte bewegen sich also ins Unendliche, d.h. sie werden vom Attraktor Unendlich angezogen, sie „divergieren".

3. Punkte, deren Betrag in der Polarform genau 1 ist. Iteriert man einen solchen Punkt, so ändert sich an seinem Betrag nichts, er geht weder gegen Null noch flieht er gegen unendlich, sondern er wandert auf der Kreislinie entlang (außer bei (Vor-)Fixpunkten).

Trägt man nun alle Punkte des dritten Falls, also alle Punkte, die von keinem Attraktor angezogen werden und so die Einflußsphären der Attraktoren abgrenzen, in ein Koordinatensystem ein, erhält man die Juliamenge für ein bestimmtes c.

Die mathematische Definition der Juliamenge lautet:

$J_c = \{z \in C : f_c^s(z) / \to \infty; s \to \infty\}$; mit $f_c(z) = z^2 + c$; $z, c \in$ C [5, S.124]

2.2 Konkrete Umsetzung der Darstellung mit Hilfe des Computers

Die Iterationsformel der Juliamenge allein sieht noch sehr theoretisch aus. Sie läßt zunächst nicht erkennen, wie man die Juliamenge grafisch mit Hilfe eines Computers darstellen kann, zumal Computer in der Regel nicht mit komplexen Zahlen rechnen können. Es gibt prinzipiell zwei Schreibweisen einer komplexen Zahl: Die Polarform und dir Koordinatenform. Während die Polarform für die Deutung der Juliamengen hilfreich ist, zieht man bei der Darstellung mit Hilfe von Computern die Koordinatenform vor, da ja auch jeder Punkt auf dem Bildschirm durch ein Koordinatenpaar angegeben wird.

Ein Punkt der komplexen Zahlenebene wird also durch die beiden reellen Zahlen x und y bestimmt, wobei gilt: $z = x + yi$. Das Quadrieren einer komplexen Zahl ist somit folgendermaßen möglich:

$$(x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2 i^2$$

Da definitionsgemäß gilt $i^2 = -1$, folgt daraus:

$$x^2 + 2xyi - y^2$$

Teilt man nun die reellen und imaginären Komponenten auf, so erhält man:

$$x_{neu} = x^2 - y^2$$
$$y_{neu} = 2xy$$

Die Parameterform der Abbildung sieht also wie folgt aus:

$$x_{n+1} = {x_n}^2 - {y_n}^2 + a$$
$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b$$

wobei $z = x + yi$ und $c = a + bi$ (Kontrollparameter)

Will man Juliamengen mit dem Computer darstellen, muß man also die Abbildung nach dieser Formel für x- und y-Koordinate einzeln berechnen.

2.3 Die verschiedenen Arten von Juliamengen

Man unterscheidet Juliamengen hauptsächlich nach dem Verhalten der konvergierenden Punkte: [6, S.98]

2.3.1 Einheitskreis

Die Juliamenge für $c = 0$ weist noch keine fraktalen Eigenschaften auf (Abb.5; auf allen Bildern ist die *gefüllte* Juliamenge dargestellt, d.h. alle konvergierenden Punkte). Die Juliamenge ist die Einheitskreislinie, die Punkte innerhalb werden vom Attraktor Null (der zugleich Fixpunkt ist), die Punkte außerhalb vom Attraktor Unendlich angezogen.

Betrachtet man die Punkte der Juliamenge als Vektoren bzw. in der Polarform, so kann man auch erkennen, daß alle Punkte bei der Iteration auf der Kreislinie wandern, außer dem Fixpunkt 1+0i (der Winkel ist 0°!) und den sog. Vorfixpunkten, d.h. allen Punkten, die diesen Fixpunkt nach einer gewissen Anzahl an Iterationen erreichen (z.B. 0+i, 0-i).

Die Juliamenge für $c = 0$ ist als einzige Juliamenge ohne fraktale Eigenschaften somit ein Sonderfall.

2.3.2 Fraktal deformierter Kreis

Verändert man den Kontrollparameter c auch nur ein wenig, werden bereits fraktale Eigenschaften sichtbar (Abb.6). Die Juliamenge für $c = 0+0{,}1i$ ist z.B. bereits ein fraktal deformierter Kreis mit unendlich großer Oberfläche. Der endliche Attraktor ist auch nicht mehr die Null, befindet sich jedoch im Inneren der konvergierenden Punktemenge.

2.3.3 Attraktiver Zykel

Wählt man c weiter vom Ursprung entfernt, so entdeckt man Juliamengen, bei denen nicht mehr ein, sondern mehrere Attraktoren existieren. Alle konvergierenden Punkte springen nach einiger Zeit zwischen mehreren für alle konvergierenden Punkte gleichen Werten hin und her. Dies nennt man einen attraktiven Zykel (Abb.7,8). Abhängig von c gibt es Juliamengen mit allen Periodenlängen (siehe 3.2).

2.3.4 Parabolischer Fall, marginal stabiler Attraktor

Für manche c liegt der attraktive Fixpunkt nicht mehr im Inneren der Juliamenge, sondern an ihren Einschnürungen. Solche Attraktoren werden als „marginal stabil“ bezeichnet. Weitere Einschnürungen der Juliamenge deuten auf Vorfixpunkte hin. Bei solchen Juliamengen spricht man vom „parabolischen Fall der Dynamik“ (Abb.9).

2.3.5 Siegel-Disk

Bei gewissen c-Werten springt der Punkt stets von einer kleineren Knospe zu einer größeren Knospe der gegenüberliegenden Seite, bis er schließlich im Segment des Fixpunktes angekommen ist (Abb.10). Dort umkreist er den Attraktor auf sogenannten „invarianten Kreisen“, d.h. auf einer unregelmäßigen Figur um den Attraktor.

Diese Erscheinung ist nach dem Göttinger Mathematiker Carl Ludwig Siegel benannt.

2.3.6 Cantor-Mengen, Fatou-Staub

Ist c sehr weit vom Ursprung entfernt, so entstehen unzusammenhängende Juliamengen, die als Cantor-Mengen bezeichnet werden (Abb.11). Konvergierende Punkte weisen hier zunächst dasselbe Verhalten wie bei der Siegel-Disk auf, sie springen also immer in die nächstgrößere Figur der gegenüberliegenden Seite, bei Cantor-Mengen erreichen sie allerdings den Attraktor.

Von Fatou-Staub schließlich spricht man, wenn die konvergierenden Punkte in unendlich vielen nicht zusammenhängenden Gruppen organisiert sind. Dies ist der Fall für c, die noch weiter vom Ursprung entfernt sind als bei Cantor-Mengen. Mit wachsender Entfernung wird der Staub feiner (Abb.12).

2.3.7 Dendriten

Für bestimmte c tritt der Fall auf, daß die Juliamenge kein Inneres mehr hat, d.h. es existieren keine konvergierenden Punkte mehr, also auch kein Attraktor. Dennoch existiert noch die Grenzfläche, die Juliamenge selbst. Solche Erscheinungen werden Dendriten (griech.: *dendron* = Baum [3, S.180]) genannt (Abb.13).

2.4 Punktsymmetrie aller Juliamengen

Alle Juliamengen sind punktsymmetrisch zum Ursprung. Dies läßt sich sehr einfach beweisen, wenn man den reellen Anteil des Punktes negiert und in die Iterationsformel in der Koordinatenform einsetzt. In dieser wird der Punkt als $-a+bi$ dargestellt.

Für den Realteil ergibt sich nach der Abbildung $(-a)^2 - b^2 = a^2 - b^2$ und für den Imaginärteil $2(-a)b = -2ab$. Setzt man in die Abbildung also einen Punkt ein, der zur imaginären Achse gespiegelt ist, so erhält man einen Punkt, der zur realen Achse gespiegelt ist. Alle Juliamengen sind also punktsymmetrisch zum Ursprung.

2.5 Darstellung der Fluchtgeschwindigkeiten mit Hilfe von Farbe

Bisher wurde in den Grafiken immer nur die Juliamenge selbst eingetragen, konvergierende und divergierende Punktemengen ergaben sich dann daraus. Es ist aber auch möglich, mit Farben zu arbeiten, um z.B. darzustellen, mit welcher Geschwindigkeit divergierende Punkte nach Unendlich streben (Abb.14). Dabei läßt sich sehr gut erkennen, daß ein Punkt desto schneller gegen unendlich geht, je weiter er von der Juliamenge entfernt ist. Punkte, die sehr nahe an der Juliamenge sind, entscheiden sich oft erst nach mehreren hundert Iterationen. Bei der Darstellung mit Computern birgt dies die Gefahr in sich, daß diese Punkte zur Juliamenge bzw. zur konvergierenden Menge gezählt werden, da aus Geschwindigkeitsgründen in der Praxis meist nur einige hundert Iterationen durchgeführt werden.
Die Farbgrenzen auf den Farbbbildern sind somit „Äquipotentiallinien“, d.h. sie kennzeichnen, daß alle Punkte auf dieser Linie nach gleich vielen Iterationen einen bestimmten Mindestabstand vom Ursprung erreicht haben. [7, S.107]

3 Mandelbrotmenge

Für welche Werte von c sich nun welche Form der Juliamenge ergibt, ist mit den bisherigen Informationen nicht ersichtlich. Mit Hilfe von Abb.15, in der verschiedene Juliamengen in Abhängigkeit des Kontrollparameters zusammengestellt sind, lassen sich schon einige Aussagen treffen. Bei c = 0+0i kann man den Einheitskreis erkennen, in Richtung -∞ ist die konvergierende Menge noch lange sehr groß und zusammenhängend, während diese in Richtung +∞ sehr schnell unzusammenhängend wird. Insgesamt kann man sehen, daß diejenigen Juliamengen, deren c weiter vom Ursprung entfernt ist, unzusammenhängender und gestreuter sind.

Pierre Fatou hat Juliamengen in zusammenhängende und unzusammenhängende eingeteilt. Er hat zudem herausgefunden, daß man sehr einfach feststellen kann, ob eine Juliamenge zusammenhängend ist, indem man einfach den kritischen Punkt 0+0i einsetzt und sein Verhalten beobachtet. Divergiert der Punkt, so ist die Juliamenge unzusammenhängend, konvergiert er, so ist sie zusammenhängend. [1, S.114] Stellt man alle konvergierenden Punkte grafisch dar, so erhält man die von Benoit Mandelbrot 1979 entdeckte Mandelbrotmenge, das „Apfelmännchen" (Abb.16).

Die mathematische Definition der Mandelbrotmenge:

$M = \{c \in C : f_c^s(z) / \to \infty; s \to \infty\}$; mit $f_c(z) = z^2 + c$; $z, c \in$ C [5, S.120]

3.1 Grobe Einteilung der verschiedenen Juliamengen mit Hilfe der Mandelbrotmenge

Mit Hilfe der Mandelbrotmenge kann man so schon relativ gut das Aussehen einer Juliamenge abschätzen. Ob sie zusammenhängend ist oder nicht, geht klar davon hervor, ob der Kontrollparameter der Juliamenge Teil der Mandelbrotmenge ist. Einheitskreis, fraktal deformierte Kreise, attraktiver Zykel, parabolischer Fall und Siegel-Disk sind demnach Teil der Mandelbrotmenge, Cantor-Menge und Fatou-Staub nicht. Dendriten erhält man für c-Werte an den Spitzen der Mandelbrotmenge, wie z.B. bei 0+i und 0-i. [7, S.108]

3.2 Genauere Untersuchung der Periodizität

3.2.1 Übersicht über die Periodizität in der komplexen Zahlenebene

Genauere Aussagen kann man treffen, wenn man beim Zeichnen der Mandelbrotmenge die Farbe der Punkte in Abhängigkeit der Periodenlänge setzt, mit der ein konvergierender Punkt den Fixpunkt umkreist (Abb.17).

Die Punkte des Hauptkörpers der Mandelbrotmenge haben die Periode 1, d.h. die Attraktoren werden erreicht und es entsteht eine endlose Folge des Fixpunktes.

Die Knospen oben und unten an Hauptkörper haben die Periode 3, die größeren Knospen rechts oben und rechts unten bzw. links oben und links unten haben die Ordnung 4 bzw. 5.

Besonders interessant wird es auf der reellen Achse in Richtung -∞. Die Periode ist zunächst 2, dann 4, dann 8, 16 usw. [2, S.167]

3.2.2 Periodenverdopplung auf der reellen Achse: Feigenbaumdiagramm

Sehr schön läßt sich diese Periodenverdopplung auf der reellen Achse gegen -∞ im Feigenbaumdiagramm darstellen, das nach den Physiker Mitchell Feigenbaum (Abb.18 [3, S.55]) benannt wurde. Dabei trägt man

die Beträge der Grenzwerte konvergierender Punkte der Iteration für die Juliamenge für verschiedene reelle c in eine Grafik ein (Abb.19).
Man kann hier sehen, daß, wenn man von rechts nach links wandert, zunächst nur der Fixpunkt erreicht wird, geht man mit c weiter gegen $-\infty$, so spaltet der eine Wert sich an einer bestimmten Stelle in zwei Werte auf, zwischen denen die Punkte der dazugehörigen Juliamenge hin und her springen. Weiter links davon kann man immer schneller aufeinander folgende Verästelungen sehen, die sehr bald ins Chaos münden.
Auffällig ist allerdings die helle Stelle im Diagramm: Ab einem bestimmten Wert für c scheint die Länge der Periode wieder abzunehmen und geordneter zu sein. Den Grund dafür kann man erkennen, wenn man das Feigenbaumdiagramm direkt mit der Mandelbrotmenge vergleicht (Abb.20). Abgesehen davon, daß bei jeder Periodenverdopplung eine neue Knospe beginnt, kann man auch sehen, daß dieser ungewöhnlich regelmäßige Bereich im Feigenbaumdiagramm der einzigen größeren Knospe an der „Antenne" der Mandelbrotmenge entspricht. [2, S.156]

Abschließend muß man zum Zusammenhang zwischen Mandelbrotmenge und Juliamenge sagen, daß diese vielleicht etwas vage und unvollständig erscheinende Beschreibung hier seine Gründe einfach darin hat, daß die präzise mathematische Herleitung dieser Zusammenhänge noch nicht abgeschlossen ist, und weitere Untersuchungen noch andauern.

3.3 Eigenschaften der Mandelbrotmenge

3.3.1 Ausmaße der Mandelbrotmenge auf der reellen Achse

Die Mandelbrotmenge erstreckt sich über das Intervall [-2; 0,25].
Die linke Grenze läßt sich einfach erklären: Auf der reellen Achse beschränkt sich die Mandelbrotabbildung auf die Form $x_{n+1} = x_n^{\ 2} + c$, wobei x die reelle Zahl ist. Bereits im ersten Iterationsschritt läßt sich hier das weitere Verhalten eines Punktes sehen. Da $x_0 = 0$ und somit $x_1 = c$, gilt $x_2 = c^2 + c$. Setzt man hier $c = -2$ ein, so erhält man $x_2 = (-2)^2 + (-2) = 4 - 2 = 2$. Setzt man die 2 immer wieder in die Abbildungsformel ein, bekommt man jedesmal wieder als Ergebnis die 2, der Punkt divergiert also nicht. Setzt man anfangs eine Zahl kleiner als –2 ein, so bekommt man nach dem ersten Iterationsschritt ein Ergebnis größer als 2. Dieses wird sich nach weiterem Iterieren weiter vergrößern, der Punkt divergiert also. Bei einem c, das etwas größer als –2 ist, erhält man nach dem ersten Schritt ein kleineres Ergebnis als 2, der Punkt läuft also auch bei weiterem Iterieren nicht gegen Unendlich. Alle negativen Zahlen, die größer oder gleich –2 sind, sind also Teil der Mandelbrotmenge.
Die rechte Grenze von 0,25 kann man ähnlich erklären. Setzt man 0,25 in die Iterationsformel ein, geht der Punkt gegen den Grenzwert 0,5; eine Zahl größer als 0,25 geht flüchtet gegen Unendlich. Der Wert 0,5 spielt hier also eine entscheidende Rolle. Wird die 0,5 erreicht, so ist die Folge mit c = 0,25 endlos, denn $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Erreicht eine Folge mit c > 0,25 den Wert 0,5, nimmt der Wert Schritt für Schritt zu, der

Punkt divergiert. Dieser kritische Wert 0,5 (oder größer) wird auf jeden Fall schon einmal bei allen Iterationen mit $c \geq 0{,}5$ eingenommen. Aber auch c-Werte zwischen 0,25 und 0,5 erreichen die 0,5, denn bei $c = 0{,}25$ ist der Grenzwert 0,5, d.h. c-Werte > 0,25 werden die 0,5 erreichen, da es sich bei der Iteration ja letztendlich um eine Summe handelt ($\left(c^2 + c\right)^2 + c\ldots$), deren Summanden größer sind.

3.3.2 Die holomorphe Form der Mandelbrotmenge

Vergrößert man die Ränder der Mandelbrotmenge immer weiter, stellt man an einigen Stellen fest, daß es Mengen konvergierender Punkte außerhalb des Hauptkörpers gibt, die mit diesem nicht verbunden zu sein scheinen. Ob Verbindungen bestehen, kann man mit Hilfe von Computern nicht beurteilen, denn die Verbindungen können unendlich dünn sein und aus Punkten bestehen, die so viele Nachkommastellen haben, daß sie von Computern nicht dargestellt werden können. Sollte es sich bei den Verbindungspunkten gar um nicht-periodische Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen handeln, so können sie Computer prinzipiell nicht darstellen. Man muß also mit der reinen Mathematik beweisen, daß die ganze Mandelbrotmenge zusammenhängend, „holomorph“, d.h. komplex differenzierbar ist.

Ob ein Körper holomorph ist, kann man beweisen, indem man überprüft, ob die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllt sind:

$$\frac{dFx}{dx} = \frac{dFy}{dy}$$

$$\frac{dFy}{dx} = \frac{-dFx}{dy}$$

Das heißt, man verwendet hierbei die Koordinatenform und teilt somit die Mandelbrotabbildung in zwei Abbildungen auf (partielle Ableitung). Der Realteil der Abbildung nach dem Realteil der Variablen abgeleitet muß also mit dem Imaginärteil der Abbildung nach dem Imaginärteil der Variablen abgeleitet identisch sein und der Imaginärteil der Abbildung nach dem Realteil der Variablen abgeleitet muß das Negative der Ableitung des Realteils der Abbildung nach dem Imaginärteil sein.

Realteil der Abbildung: $x_{n+1} = x_n^{\ 2} - y_n^{\ 2} + a$

Imaginärteil der Abbildung: $y_{n+1} = 2x_n y_n + b$

wobei $z = x + yi$ und $c = a + bi$

Ableitung des Realteils nach x: 2x

Ableitung des Imaginärteils nach y: 2x

Ableitung des Realteils nach y: -2y

Ableitung des Imaginärteils nach x: 2y

Die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen sind also erfüllt. [2, S.128]

Iteriert man die Abbildung, ändert sich natürlich an der holomorphen Eigenschaft nichts, da man diesen Beweis auf jeden Schritt anwenden kann. Die Mandelbrotmenge ist also holomorph, die kleinen Inseln am Rand der Mandelbrotmenge müssen mit dem Hauptkörper verbunden sein.

4 Abschließende Worte

$z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c$. An sich sieht die Formel ganz einfach aus. Wie man sie verwendet, ist auch noch ganz einfach. Doch was man damit für Erscheinungen an der Grenze zum Chaos bekommt, ist faszinierend. Diese Formel könnte eine Wissenschaft für sich sein, denn beim Ergründen der Zusammenhänge findet sich so schnell kein Ende. Aus diesem Grund konnte natürlich auch diese Arbeit hier nur die wichtigsten Zusammenhänge darstellen und die wenigsten davon auch noch umfassend begründen. Des weiteren muß man bedenken, daß die fraktale Geometrie eine relativ junge „Wissenschaft" ist und auch heute noch an den Grundlagen geforscht wird. Es bleibt abzuwarten, ob man alle Erscheinungen von Julia- und Mandelbrotmenge jemals ganz deuten können wird.

5 Anhang

5.1 Verzeichnis verwendeter Literatur und anderer Hilfsmittel

Bücher/ Zeitschriften

[1] Jürgens, H., Peitgen H.-O., Saupe, D., *Fraktale – eine neue Sprache für komplexe Strukturen*, in: *Spektrum der Wissenschaft – Chaos und Fraktale*, S. 106

[2] Schmitter, E.D., *Fraktale Geometrie – Eine praktische Einführung auf dem Computer*, Holzkirchen 1989

[3] Schreiber, H. (Hrsg.), *GEO Wissen – Chaos + Kreativität*, Hamburg 1990

[4] Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München: *Handreichung für den Mathematikunterricht im Gymnasium - Teil 1*, München 1992

[5] Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München: *Handreichung für den Mathematik- und Physikunterricht im Gymnasium - Fraktale Geometrie und Chaos*, München 1997

[6] Vilsmeier, S., *Vorstoß ins Chaos* (Teil 5), in: *64'er* 3/88, S.97

[7] Vilsmeier, S., *Vorstoß ins Chaos* (Teil 6), in: *64'er* 4/88, S.106

Sonstige Hilfsmittel

Software WINFRACT 18.21 zum Erstellen von Abbildung 14

Software FRACTINT 18.2 zum Erstellen von Abbildung 15

Programmiersprache PowerBASIC 3.20 zum Programmieren der meisten Abbildungen

5.2 Abbildungen

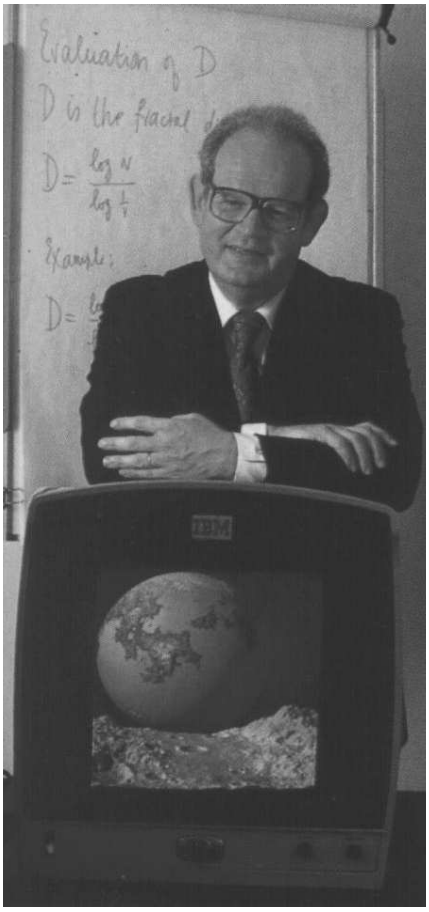

Abbildung 1: Benoit Mandelbrot

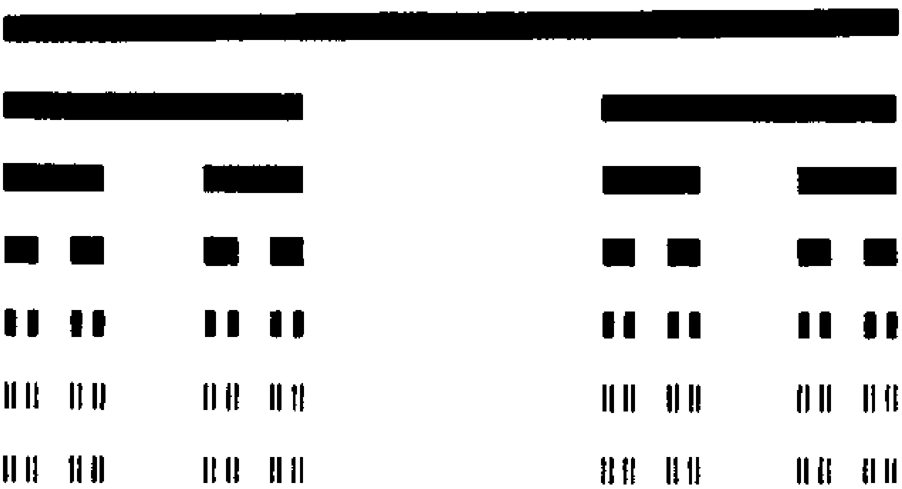

Abbildung 2: Entstehung von Cantor-Staub

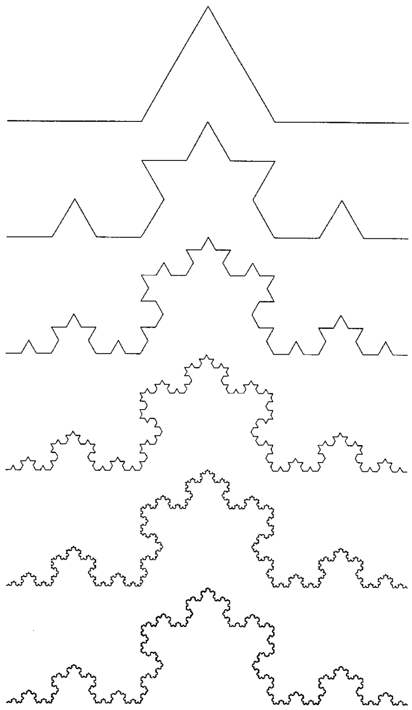

Abbildung 3: Entstehung der Koch-Kurve

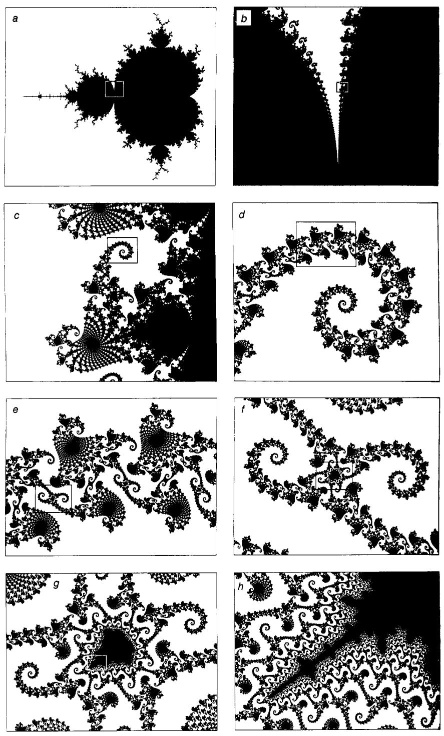

Abbildung 4: Immer weitere Vergrößerung der Mandelbrotmenge (siehe 2.) bringt immer neue Strukturen zum Vorschein. Die Oberfläche ist deswegen unendlich lang.

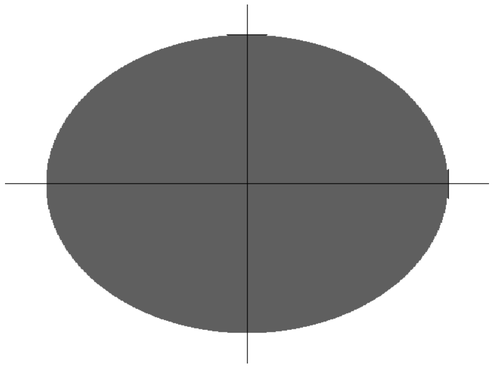

Abbildung 5: Einheitskreis bei $c = 0$

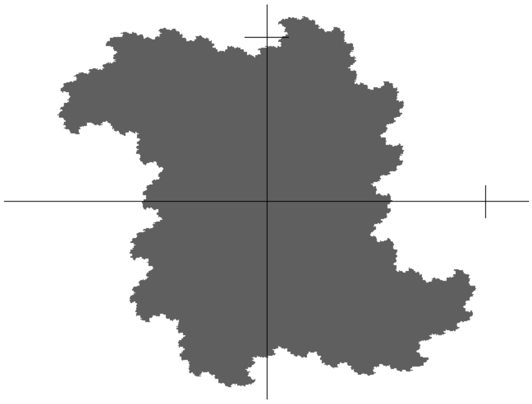

Abbildung 6: Fraktal deformierter Kreis bei c = 0,3+0,3i

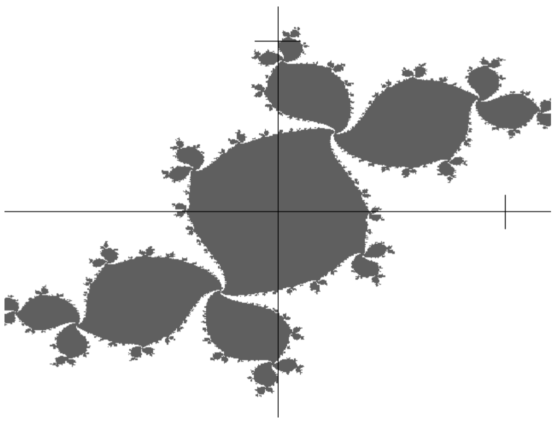

Abbildung 7: Attraktiver Zykel der Periode 3 bei c = -0,1-0,7i

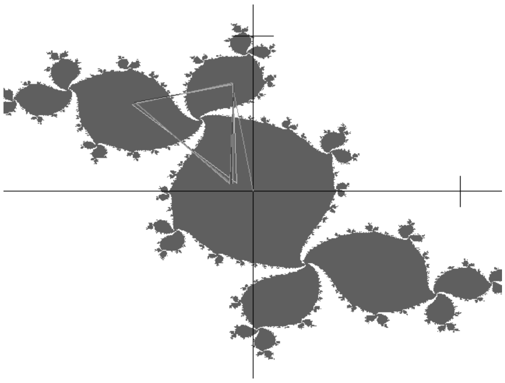

Abbildung 8: Weg des Punkts 0 in einen attraktiven Zykel der Periode 3 (c = -0,1+0,7i)

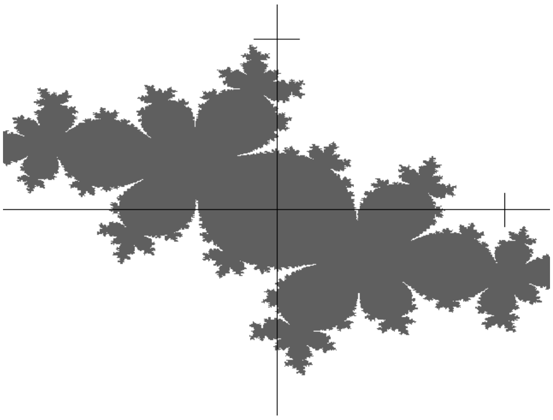

Abbildung 9: Parabolischer Fall, marginal stabiler Attraktor bei –0,48+0,53I

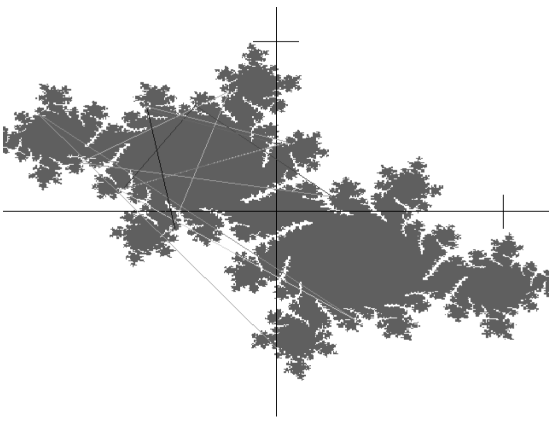

Abbildung 10: Weg des Punktes –8i auf einer Siegel-Disk (c = -0,41+0,58i)

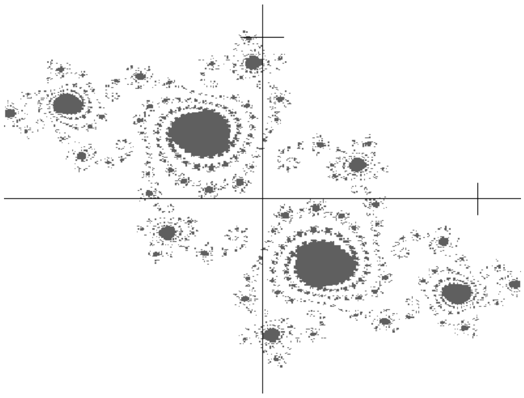

Abbildung 11: Cantor-Menge (c = -0,194+0,6557i)

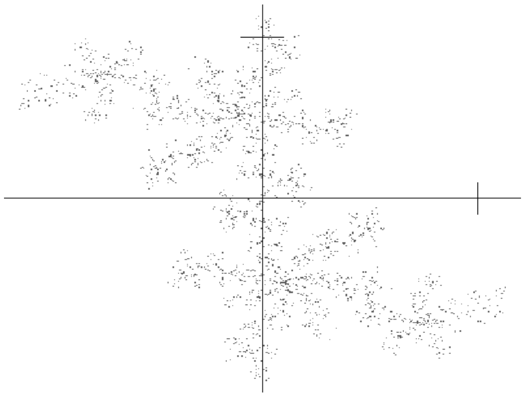

Abbildung 12: Fatou-Staub (c = 0,145+0,63i)

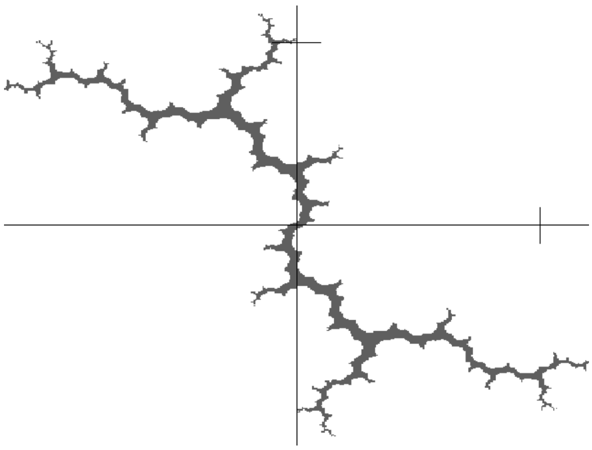

Abbildung 13: Dendrit bei c = i (echte Juliamenge)

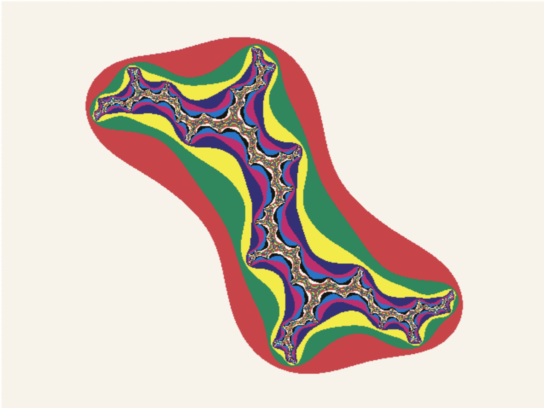

Abbildung 14: Dendrit aus Abbildung 13 in Farbdarstellung

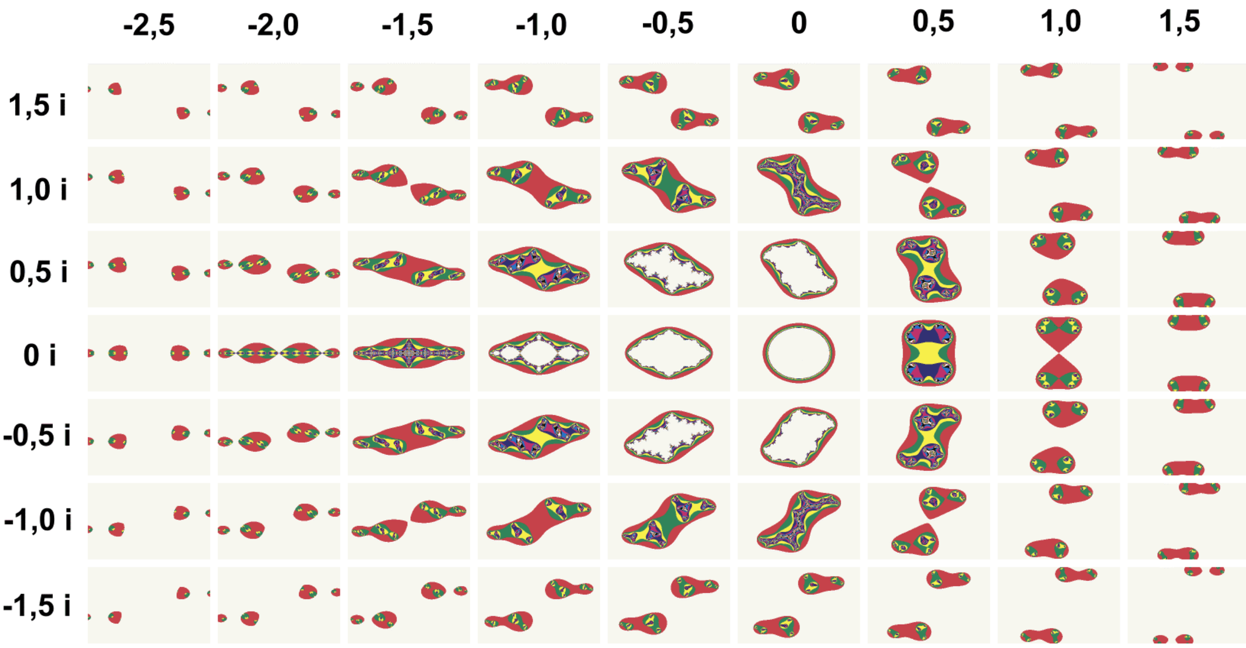

Abbildung 15: Grobübersicht über Juliamengen in Abhängigkeit von c

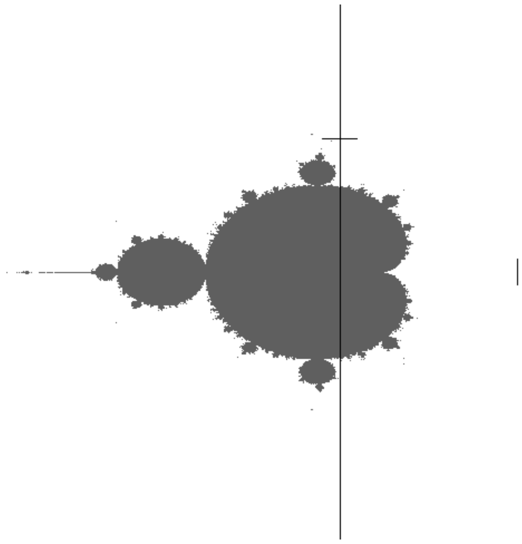

Abbildung 16: Mandelbrotmenge (damit man die „Antenne“ links besser erkennen kann, wurde die reelle Achse weggelassen)

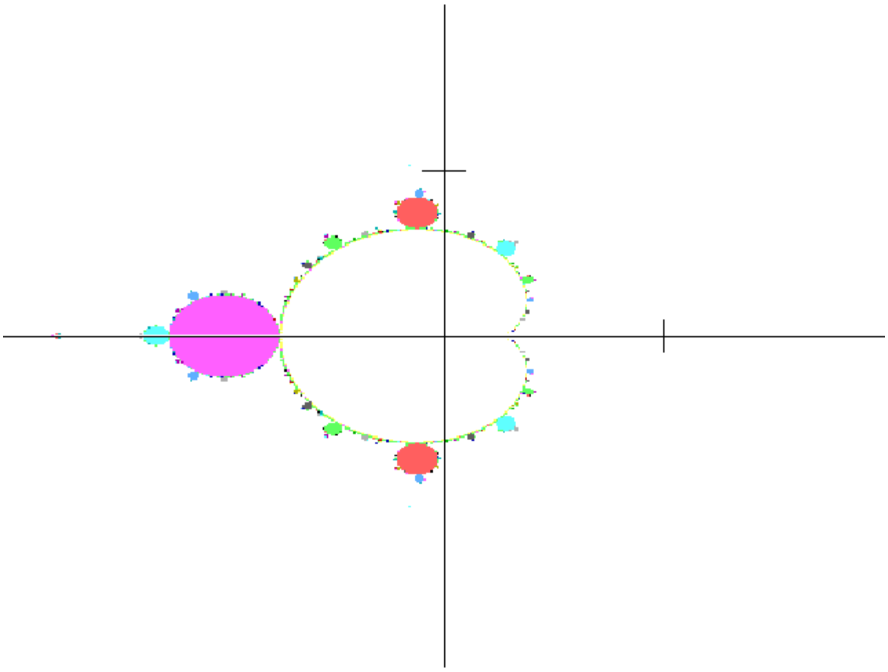

Abbildung 17: Farbige Darstellung der Periodenlängen

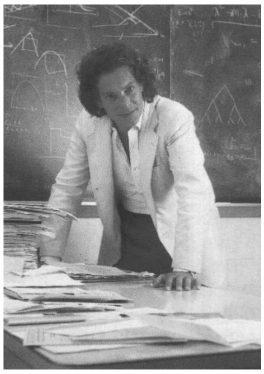

Abbildung 18: Mitchell Feigenbaum

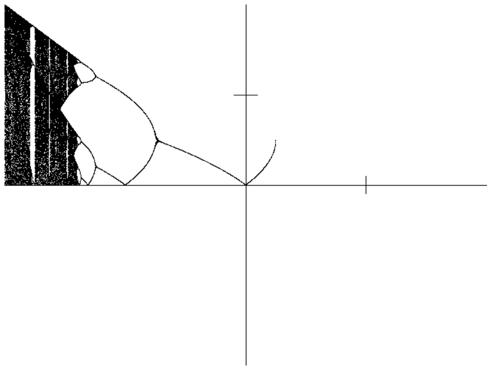

Abbildung 19: Darstellung der Periodenverdopplung auf der reellen Achse im Feigenbaumdiagramm

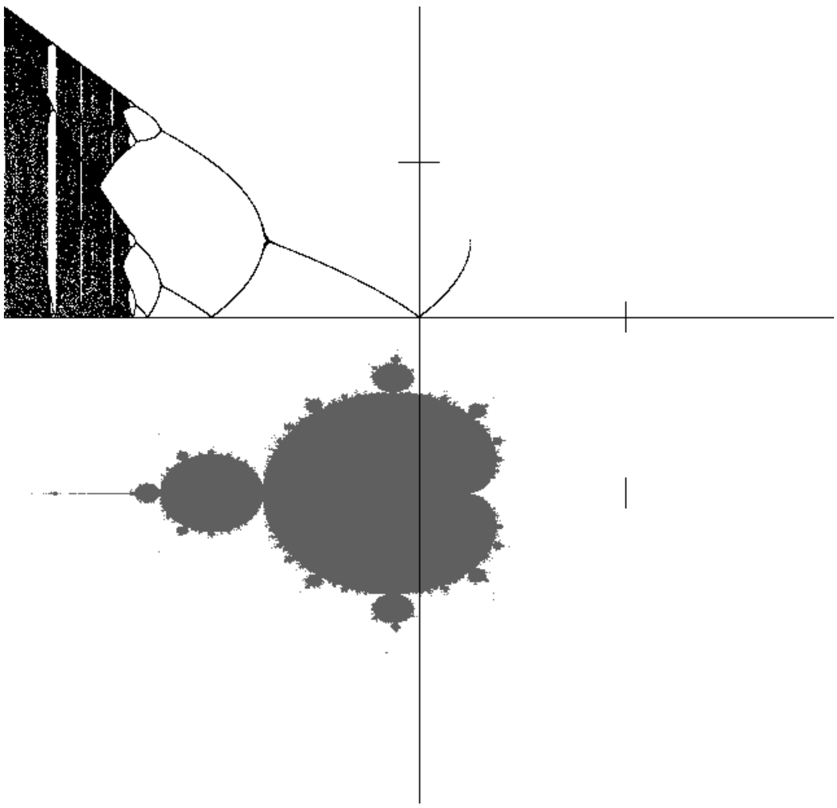

Abbildung 20: Direkte Gegenüberstellung von Feigenbaumdiagramm und Mandelbrotmenge